大家好，欢迎收看线性代数习题课。
我相信你们已经越来越熟悉矩阵的行列式了。我们在上一节课中，
还学习了矩阵行列式的几何意义，一个矩阵行列式的绝对值
也就是等于该矩阵行向量所张成的平行六面体的体积。
今天我们就要用这个性质来解决如下的例题。我们要计算一个四面体T的体积。
这个四面体由它的四个顶点，完全决定，分别是原点，A1、A2和A3，
它们的坐标由这些数字给出。我们首先要计算 T的体积。随后如果A1和A2
不动，但把A3移动到新的一点A3' A3'的坐标由如下给出，（-201，-199，104)
我们要重新计算T的体积。这里我们先来复习一下四面体的体积公式，
一个四面体的体积等于1/3乘以底面积再乘以高。
你可以选取任何一面作为底面积，那么想对应的顶点就成为高。
这里以方便起见，我们将选择三角形O A1A2为底面，那么相应的A3就成为顶点。
所以T的体积就由1/3 乘以三角形OA1A2的面积。
这表示它的面积，再乘以高，由字母H表示。好，我们要用行列式的方法来计算
T的体积。但是我们知道一个矩阵的行列式
是通过一个平行六面体的体积来联系的，
但是现在我们只有一个四面体。所以第一步应该是找到
一个平行六面体，使得T可以和该平行六面体联系起来。
现在请你暂停这个视频，尝试在这个图片上画出平行六面体。
稍后我将回来并介绍我的解法。我希望你已经成功地找到了那个平行六面体。
我们来观察这个四面体T，它的四个顶点分别是原点，A1、A2和A3，
观察到这三条边，OA1 OA2和OA3全部相交于原点O，
那么同时这三条边，还可以张成一个平行六面体。
这就是我们所要考虑的平行六面体，我们来看这边的这个图片。
蓝色部分为原来的四面体T，红色部分为我们要考虑的平行六面体，我记为P，
可以看到这个平行六面体由边OA1、OA2和OA3张成。
它完全包含了原来的四面体T，下面我们要考虑，
T的体积与P的体积之间的关系。它们的关系
由如下的式子给出。我们先来考虑T的体积。正如我们刚才所说的，
T的体积等于1/3的底面积乘以高，底面积由这个三角形OA1A2的面积给出。
高由顶点A3到底面的距离给出。那么平行六面体P的体积又是什么呢？
平行六面体P的体积由底面积乘以高给出。

乘以高。同样我们可以选取任何一面作为底面积。
但是这里我们将选取这个平行四边形为底面积。
原因很简单，这个平行四边形包含了 我们所选取的这个四面体的底面积。另外
你可以看到这个平行四边形就是由两倍的这个三角形所构成。
所以底的面积，也就是等于2倍的 三角形OA1A2的面积，再乘以高，

那么如果选取了这个平行四边形作为底面的话，
A3就变成了这个平行六面体的顶点，高就是
A3到这个底面的距离，但这和A3到三角形的距离是一致的。
也就是说这里的高，等于这里的H。
现在你可以比较这两个式子，你可以看得出来，T的体积
也就是等于1/6的P的体积。我们找到了平行六面体P，
并且我们已把T的体积与P的体积联系起来。下面我们只需要求P的体积。
根据行列式的几何意义，我们知道P的体积，
也就是等于一个3乘以3矩阵行列式的绝对值。不要忘记这个绝对值符号。
该矩阵就由这三边作为行向量组成。
那么因为每一边的起点都是原点，所以我们只
需要把这三个顶点的坐标放入矩阵即可。也就是2、2、-1，1、3、0，-1、1、4。你可以用任意一种方法计算这个3乘以3矩阵的行列式。
所得结果应该为12。那这就是这个平行六面体P的体积。
回到四面体T，我们知道四面体T的体积就应该等于1/6
这个数值，也就是2。这样我们就得到了四面体T的体积。
下面我们来考虑这个问题的第二部分。现在我要保证A1和A2不动，
但是我要把原来的顶点A3移动到一个新的顶点A3'，由（-201、-199、104）给出。你可以从这个点的坐标看出，该点离原点非常的远。
我们将无法在这个图片上准确地画出该点，但是你可以想象
这个尖部将变得更为尖锐，也就是说整个四面体看起来像一个针状，
尽管如此，我们还是可以计算它的体积。通过同样的方法，所以我们
用同样的方法计算T的体积。T的体积，
这个新的四面体，我记为T'。T‘的体积，应该等于1/6
乘以一个矩阵的行列式绝对值。那么现在这个矩阵前两行是不变的，2、2、-1，1、3、0，第三行将变为这个新的顶点的坐标，也就是-201、-199、104，
你可以直接计算这个矩阵的行列式。
如果你的计算没有错误的话，答案还应该是2。

而实际上我并不需要再重复计算该矩阵的行列式，
这个结果可以直接从A3到A3‘的变化中得出。我们来观察这个新的A3’，
你注意到新的第三行，实际上等于原来的第三行减去100倍的第一行。
也就是说，新的顶点是在原来顶点基础上，沿着负的
第一边的方向移动了100倍的第一边。
反应在矩阵中就是这样的，第三行等于原有第三行减去100倍第一行，
但是通过行列式的第五个性质，我们知道这样的变换是不改变行列式的。
也就是说你可以直接得到和以前相同的结果，也就是2。
那么这是一个比较直观的方法来观察矩阵行列式的第五个性质。

反映在图片中是这样的，我们从原来的顶点A3出发，
沿着A1的反方向移动100倍A1，其实不管‘我们移动的距离有多大，
我们这个移动的轨迹始终是和底面平行的。
也就是说在移动过程中，这个平行六面体的高是并不改变的，平行六面体的底面是固定的，而高不改变，这就说明
该平行六面体的体积是不改变的。所以我们同样得到了一样的结果。
好，这就是这道题的答案，我希望通过这个
例题，你可以看出，矩阵行列式不仅仅是一个数值，
它还可以和这样一幅图片相关联。这在我们计算某些几何图形的体积时，
可以是非常方便的方法，因为通过这种方法，我们就不需要直接计算出高了。
感谢收看，希望下次再见。Funding for this video was provided by the Lord Foundation. To help OCW continue to provide free and open-access MIT courses, Please make a donation at ocw.mit.edu/donate.