大家好，欢迎收看线性代数习题课。我们在课堂上学习了两个非常重要的概念，
线性空间和线性子空间。那么我们来一起回顾一下什么是线性空间呢?
当我们讨论一个空间的时候，我们实际上是看一个集合，
那这个集合中将含有很多元素，要成为一个
线性空间的话这些元素要满足两个条件，
第一，如果你对其中任何一个元素乘以一个常数的话，
那么得到的结果还应该在这个集合中。
第二，如果你选取集合中的任何两个元素对它们求和的话，
结果还应该在此集合中。如果这两个条件
同时满足的话，那么这个集合就成为一个线性空间。
在线性空间中，如果你可以找到一个子集
使得该子集对于两个条件也同时满足的话，
那么这个子集就将成为该线性空间的线性子空间。
今天我们要用这道例题来复习这两个非常重要的性质。
我们来看X1和X2都是R3中的两个列向量，我已经在这个图片中画出x1在这里，
X2在这里，那么我们要做的是首先要找出X1生成的线性子空间，记为V1。
让我来解释一下什么叫做X1生成的线性子空间。
实际上我们就是要找一个最小的线性子空间，使得X1包含在该线性子空间中。
同样我们也要找到x2生成的线性子空间，记为V2。
随后我们要来考虑一下V1和V2的交集。
我们要来讨论一下V1和V2的交集是不是也构成一个线性子空间。
这是第一个问题。第二个问题我们要把X1和X2放在一起考虑，
我们要考虑X1和X2生成的线性子空间，记为V3。
那么一个很自然的问题就应该是V3是不是就等于V1和V2的并集呢?
在我们解决这些问题之后我们还要找到V3中的一个线性子空间记为S，
使得X1和X2均不为S中的元素。这就是第二道问题。最后我们要来看一下
V3与XY平面的交集。
当然XY平面也是R3的一个线性子空间，所以最后一个问题我们仍然是看
两个线性子空间的交集，现在请你暂停这个视频，
尝试独立求解，我将随后回来完成这个图片。好，你找到这些线性子空间了吗?
一个非常方便的方法就是在这个图片中，画出这些线性子空间。
我们先来从第一个问题开始。现在我们要找到向量x1生成的线性子空间，
来回忆线性空间的第一个条件，
我们需要对X1乘以任意一个常数结果还应该维持在
该线性子空间中。那么也就是说我们至少应该包含
一整条经过X1的直线，所以我们现在把这个直线画出，你可以简单的将X1
向正反两个方向同时延伸，希望我画出的线是直的。那么这条直线包含X1，
这条直线至少应该在我们线性子空间V1中。

下面再来看看V1中除了这条直线以外还有没有其他的元素。
那么我们需要考虑第二个条件也就是说，在对任意两个
元素求和的时候，所得结果并不离开该集合。

那么如果你对任意直线上的两点求和，
很显然你所得到的点还应该在这条直线上，
也就是说这条直线本身就已经满足了线性子空间的两个条件，
那很显然，这就是我们要找的X1生成的线性子空间V1。
同样我们可以对X2进行一样的操作。向X2的正反两个方向延伸，那么这一条直线
就是包含X2的直线，同样的这条直线
也构成了一个线性子空间，也就是X2所生成的线性子空间记为V2。
好下面我们来看V1和V2的交集是什么？很显然V1和V2是R3中的两条直线，
并且它们肯定不平行，因为X1和X2肯定不平行的，
那么V1和V2的交集就只有可能是它们唯一相交的一点，
那么V1和V2在哪里相交呢？很显然V1经过原点，
V2也经过原点，那么这个唯一的交集就应该为原点。
这是一个单点集，这个集合只有一个元素也就是0，0元素，
原点。好现在我们来看这个集合构不构成一个线性子空间呢？
通常我们说形容一个空间的时候，我们通常会想象该空间中应该有很多元素，
但是这里只有一个元素，但即使是如此这个集合满足
线性空间所需要的两个条件，
我们可以看你用原点0元素乘以任何常数，你还是得到0，
那么0加上0也同样是0，也就是说即使这个集合
只有一个元素，它同样也构成了R3中的一个线性子空间。
这就完成了第一道问题。下面我们来看第二个问题，
第二个问题我们要考虑X1和X2同时生成的线性子空间记为V3，
我们首先来看V3是不是就等于V1与V2的并集？一个简便的办法就是说，
来看V1和V2构不构成一个线性子空间？所以我们现在来考虑，V1和V2的并集。
来对V1并V2检验那两个条件，
首先你对其中任何一个元素乘以任何一个常数的话，
看起来确实是不离开这个并集的，因为该元素要么在V1上，
要么在V2上，再乘以任何一个常数的话还应该在V1或V2上。
所以第一个条件实际上是满足的，但是我们来看第二个条件，
第二个条件说我们对任意两个元素求和的话，
和也一样要在该集合中，那么V1并V2满不满足这个条件呢？
来看一个简单的例子X1加X2，所以X1加X2等于什么呢？
我们对那两个向量的各个坐标求和，它应该等于2,5,3，
我们还可以将这个和在这个图片中画出，它大概的位置应该是在这里。

好这就是X1加上 X2。很显然的， 这个点已经远离了V1并V2，
所以这个和是并不在V1并V2中的。 这就说明V1和V2并不构成一个线性子空间，
那么X1，X2生成线性子空间一定不等于V1并V2。
现在我们来研究到底什么应该是V3？ V3是由X1，X2生成线性子空间， 由如上的
论证看出， 至少V3应该包含于类似于这样对角线的元素，
但是事实上因为我们可以选取任意V1和V2上的点做求和， 它实际上包含的
是整个V1与V2生成的平面，
也就是说实际上我们看到的应该是这个无限大的平面。

这才应该是我们要找的 V3。这个结果很自然你在三维空间中观察两条直线，
这两条直线相交于原点， 那么它们所生成的线性子空间， 很正常的应该是，
包含这两条直线的平面， 这就是V3。
好现在我们要找到的就是V3中的一个线性子空间S， 使得X1并不属于S，
X2也不属于S， 我们能不能找到这样一个线性子空间呢？
其实如果你观察这个图片的话， 结果已经很显然了， 我们就可以利用
这个向量来张成一个子空间， 很显然这个
向量在V3中那么它生成的线性子空间也一定包含于V3中。
下面我们来看这个向量张成的线性子空间， 同理，
你如果向正反两个方向延伸这个向量的话，
所得到的这条直线， 经过原点的直线， 就是我们所要找到的线性子空间记为S。
S是V3的一个线性子空间，
但是很显然，X1不属于S，X2也不属于S，这就是我们所要找到的S。
下面我们可以看最后一个问题。 最后一个问题是要研究V3这个平面与
XY平面的交集。那么在3D空间中，
两个平面相交的结果应该是什么呢？很显然两个平面相交应该得到一条直线，
那如何找到这个直线呢？换句话说我们要找到
一条直线， 使得它同时在V3与XY平面中，
来观察XY平面中的点， 它所具有的性质就是 Z坐标应该为零。
那么如果你在观察V3这个由X1和X2张成的线性子空间的话，
你很容易观察到X2这个向量 显然在V3中， 但同时它的Z坐标也为零， 所以V3交
XY平面的话， 就应该由X2所 张成的线性子空间给出， 那么这里我们知道， 它其实
就等于V2，好这就是答案， 我们看到
V3是R3的线性子空间，XY平面也是线性子空间， 它们的交集
又得到一个R3中的线性子空间。 我希望通过这个例题我们可以
了解这种线性空间与线性子空间可以通过一个图片来比较形象地表示。
我希望这个例题对你有所帮助希望下次再见。谢谢。 Funding for this video was provided by the Lord Foundation. 